Zadatak 041 (Danijel, gimnazija)

Riješi sustav nejednadžbi: $-1<\frac{2\cdot x-1}{2\cdot x+1}<1.$

Rješenje 041

Ponovimo!

$$a<x<b\ \Rightarrow\ \left.\begin{matrix}a<x\\x<b\end{matrix}\right\}\quad,\quad \frac{a}{b}>0\ \Rightarrow\ \left.\begin{matrix}a>0\\b>0\end{matrix}\right\}\ \text{i}\ \left.\begin{matrix}a<0\\b<0\end{matrix}\right\}.$$

Transformiramo sustav nejednadžbi:

$$-1<\frac{2\cdot x-1}{2\cdot x+1}<1\ \Rightarrow\ \left.\begin{matrix}-1<\frac{2\cdot x-1}{2\cdot x+1}\\ \frac{2\cdot x-1}{2\cdot x+1}<1\end{matrix}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{matrix}-1-\frac{2\cdot x-1}{2\cdot x+1}<0\\ \frac{2\cdot x-1}{2\cdot x+1}-1<0\end{matrix}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{matrix}\frac{-(2\cdot x+1)-(2\cdot x-1)}{2\cdot x+1}<0\\ \frac{2\cdot x-1-(2\cdot x+1)}{2\cdot x+1}<0\end{matrix}\right\}\ \Rightarrow$$

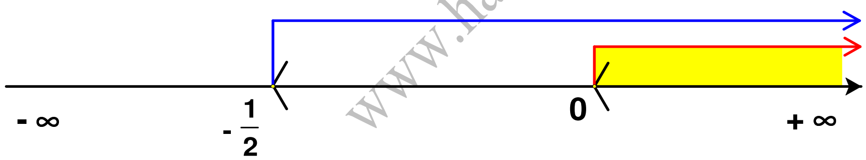
$$\Rightarrow\ \left.\begin{matrix}\frac{-2\cdot x-1-2\cdot x+1}{2\cdot x+1}<0\\ \frac{2\cdot x-1-2\cdot x-1}{2\cdot x+1}<0\end{matrix}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{matrix}\frac{-2\cdot x-1-2\cdot x+1}{2\cdot x+1}<0\\ \frac{2\cdot x-1-2\cdot x-1}{2\cdot x+1}<0\end{matrix}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{matrix}\frac{-4\cdot x}{2\cdot x+1}<0\ /:(-4)\\ \frac{-2}{2\cdot x+1}<0\ /:(-2)\end{matrix}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{matrix}\frac{x}{2\cdot x+1}>0\\ \frac{1}{2\cdot x+1}>0\end{matrix}\right\}.$$

Svaku nejednadžbu sustava riješimo zasebice:

- $\frac{x}{2\cdot x+1}>0$

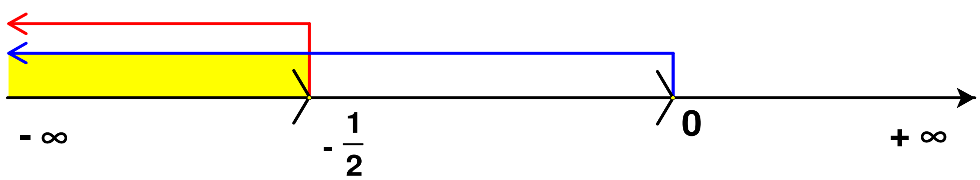
1. slučaj

$$\frac{x}{2\cdot x+1}>0\ \Rightarrow\ \left.\begin{matrix}x>0\\2\cdot x+1>0\end{matrix}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{matrix}x>0\\2\cdot x>-1\ /:2\end{matrix}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{matrix}x>0\\x>-\frac{1}{2}\end{matrix}\right\}\ \Rightarrow\ \left[\begin{matrix}\text{presjek}\\\text{skupova}\end{matrix}\right]\ \Rightarrow\ x>0\ \Rightarrow\ x\in\left\langle 0,+\infty\right\rangle.$$



2. slučaj

$$\frac{x}{2\cdot x+1}>0\ \Rightarrow\ \left.\begin{matrix}x<0\\2\cdot x+1<0\end{matrix}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{matrix}x<0\\2\cdot x<-1\ /:2\end{matrix}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{matrix}x<0\\x<-\frac{1}{2}\end{matrix}\right\}\ \Rightarrow\ \left[\begin{matrix}\text{presjek}\\\text{skupova}\end{matrix}\right]\ \Rightarrow\ x<-\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ x\in\left\langle -\infty,-\frac{1}{2}\right\rangle.$$



Konačno rješenje nejednadžbe

$$\frac{x}{2\cdot x+1}>0$$

je unija rješenja oba slučaja:

$$x\in\left\langle -\infty,-\frac{1}{2}\right\rangle\cup\left\langle 0,+\infty\right\rangle.$$

- $\frac{1}{2\cdot x+1}>0$

Budući da je brojnik pozitivan broj, slijedi:

$$\frac{1}{2\cdot x+1}>0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} 1>0 \\ 2\cdot x+1>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2\cdot x+1>0 \Rightarrow 2\cdot x>-1 \;/:2 \Rightarrow x>-\frac{1}{2} \Rightarrow x\in\left\langle -\frac{1}{2}, +\infty\right\rangle.$$

Konačno rješenje zadanog sustava nejednadžbi je presjek rješenja

$$x\in\left\langle -\infty, -\frac{1}{2}\right\rangle \cup \langle 0, +\infty\rangle \text{ i } x\in\left\langle -\frac{1}{2}, +\infty\right\rangle:$$

$$\left(\left\langle -\infty, -\frac{1}{2}\right\rangle \cup \langle 0, +\infty\rangle\right) \cap \left\langle -\frac{1}{2}, +\infty\right\rangle = \langle 0, +\infty\rangle.$$

Vježba 041

Riješi sustav nejednadžbi: $-1<\frac{1-2\cdot x}{2\cdot x+1}<1.$

Rezultat: x > 0.

Zadatak 042 (Željko, gimnazija)

Riješi sustav jednadžbi: $\frac{x\cdot y}{x+y}=\frac{1}{5} \quad , \quad \frac{x\cdot z}{x+z}=\frac{1}{6} \quad , \quad \frac{y\cdot z}{y+z}=\frac{1}{7}.$

Rješenje 042

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c} \quad , \quad \frac{n}{1}=n \quad , \quad \frac{a+b}{n}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n}.$$

Transformiramo sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{matrix} \frac{x\cdot y}{x+y}=\frac{1}{5} \\ \frac{x\cdot z}{x+z}=\frac{1}{6} \\ \frac{y\cdot z}{y+z}=\frac{1}{7} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \frac{x+y}{x\cdot y}=\frac{5}{1} \\ \frac{x+z}{x\cdot z}=\frac{6}{1} \\ \frac{y+z}{y\cdot z}=\frac{7}{1} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \frac{x}{x\cdot y}+\frac{y}{x\cdot y}=5 \\ \frac{x}{x\cdot z}+\frac{z}{x\cdot z}=6 \\ \frac{y}{y\cdot z}+\frac{z}{y\cdot z}=7 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \frac{x}{x\cdot y}+\frac{y}{x\cdot y}=5 \\ \frac{x}{x\cdot z}+\frac{z}{x\cdot z}=6 \\ \frac{y}{y\cdot z}+\frac{z}{y\cdot z}=7 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \frac{1}{y}+\frac{1}{x}=5 \\ \frac{1}{z}+\frac{1}{x}=6 \\ \frac{1}{z}+\frac{1}{y}=7 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=6 \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=7 \end{matrix}\right\}.$$

Zbrojimo dobivene jednadžbe:

$$\left.\begin{matrix} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=6 \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=7 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{zbrojimo} \\ \text{jednadžbe} \end{matrix}\right] \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}+\frac{1}{z}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=5+6+7 \Rightarrow \frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}=18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}=18 \;/:2 \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=9.$$

Od ove jednadžbe oduzmemo prvu jednadžbu iz sustava:

$$\left.\begin{matrix} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=9 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{oduzmemo} \\ \text{jednadžbe} \end{matrix}\right] \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=9-5 \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=9-5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z}=4 \Rightarrow z=\frac{1}{4}.$$

Ostale nepoznanice iznose:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{z}=4\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=6\\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=7\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\frac{1}{x}+4=6\\ \frac{1}{y}+4=7\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\frac{1}{x}=6-4\\ \frac{1}{y}=7-4\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\frac{1}{x}=2\\ \frac{1}{y}=3\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\ y=\frac{1}{3}\end{array}\right\}.$$

Rješenje sustava glasi:

$$(x,\ y,\ z)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right).$$

Vježba 042

Riješi sustav jednadžbi: $\frac{x\cdot y}{x+y}=\frac{1}{7}$, $\frac{x\cdot z}{x+z}=\frac{1}{5}$, $\frac{y\cdot z}{y+z}=\frac{1}{6}$.

Rezultat: $(x,\ y,\ z)=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$.

Zadatak 043 (Ante, Visoka škola za sigurnost)

Riješi računski i grafički sustav jednadžbi: $y = 3 \cdot x$, $y = x^2 + 2$.

Rješenje 043

Ponovimo!

Kako riješiti sustav linearne i kvadratne jednadžbe:

$$a \cdot x + b \cdot y + c = 0,$$
$$A \cdot x^2 + B \cdot x \cdot y + C \cdot y^2 + D \cdot x + E \cdot y + F = 0?$$

Iz prve (linearne) jednadžbe izračunamo vrijednost jedne nepoznanice i uvrstimo u drugu (kvadratnu) jednadžbu. Na taj način dobivamo kvadratnu jednadžbu po jednoj nepoznanici. Riješimo je i rješenja uvrstimo u izračunatu vezu. Ako je zadan sustav ovog oblika

$$\begin{cases} y=k\cdot x+l\\ y=a\cdot x^2+b\cdot x+c,\end{cases}$$

najjednostavnije je učiniti eliminaciju nepoznanice y:

$$k\cdot x+l=a\cdot x^2+b\cdot x+c.$$

Nakon sređivanja dobivamo kvadratnu jednadžbu po nepoznanici x:

$$a\cdot x^2+(b-k)\cdot x+c-l=0.$$

Ona može imati dva, jedno ili nijedno realno rješenje.

Koji je geometrijski smisao ovih jednadžbi?

Prva jednadžba

$$y=k\cdot x+l$$

jednadžba je pravca.

Druga jednadžba

$$y=a\cdot x^2+b\cdot x+c$$

jednadžba je parabole.

Presjek pravca i parabole su točke (najviše dvije) čije koordinate dobivamo rješavajući sustav

$$\begin{cases} y=k\cdot x+l\\ y=a\cdot x^2+b\cdot x+c.\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = 3 \cdot x \\ y = x^2 + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 + 2 = 3 \cdot x \Rightarrow x^2 - 3 \cdot x + 2 = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 - 3 \cdot x + 2 = 0 \\ a = 1 \ , \ b = -3 \ , \ c = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 1 \ , \ b = -3 \ , \ c = 2 \\ x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \frac{3+1}{2} \\ x_2 = \frac{3-1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \frac{4}{2} \\ x_2 = \frac{2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{array}\right\}.$$

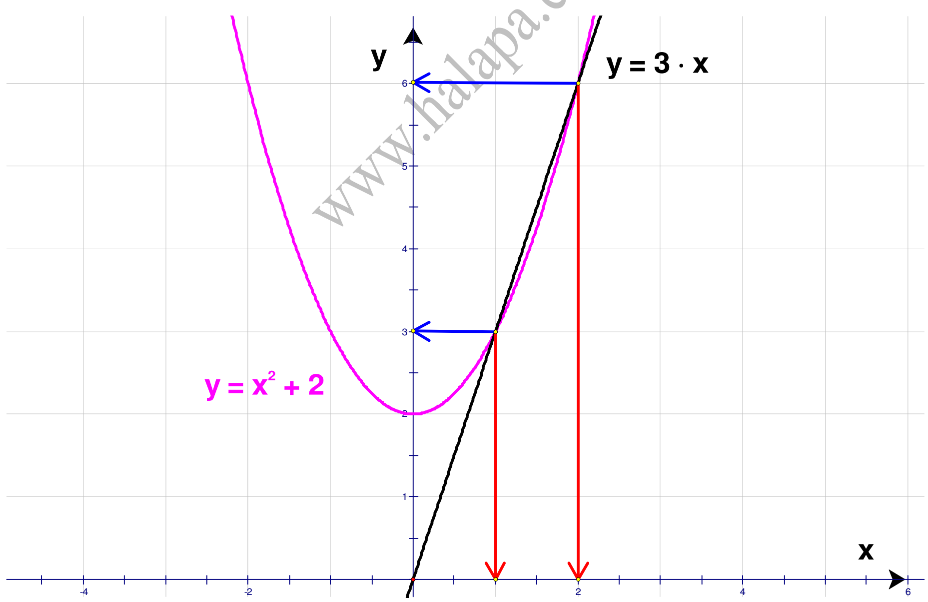
Sada računamo nepoznanicu y, na primjer, iz jednadžbe y = 3 · x:

- $$\left.\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ y_1 = 3 \cdot x_1 \end{array}\right\} \Rightarrow y_1 = 3 \cdot 2 \Rightarrow y_1 = 6.$$
- $$\left.\begin{array}{l} x_2 = 1 \\ y_2 = 3 \cdot x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow y_2 = 3 \cdot 1 \Rightarrow y_2 = 3.$$

Rješenja su:

$$(x_1, y_1) = (2, 6) \quad , \quad (x_2, y_2) = (1, 3).$$

Grafički!



Vježba 043

Riješi računski sustav jednadžbi: $y = -x + 1$, $y = x^2 - 2 \cdot x - 1$.

Rezultat: $(x_1, y_1) = (-1, 2)$, $(x_2, y_2) = (2, -1)$.

Zadatak 044 (Tonka, srednja škola)

Ako je a + b = 5, b + c = 8, c + a = 7, koliko je a · b · c?

Rješenje 044

1.inačica

Budući da je zadan sustav od tri jednadžbe sa tri nepoznanice a, b i c, a svaka se nepoznanica pojavljuje dva puta, zbrojit ćemo sve tri jednadžbe.

$$\left.\begin{array}{l} a+b=5 \\ b+c=8 \\ c+a=7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zbrojimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow a+b+b+c+c+a=5+8+7 \Rightarrow 2\cdot a+2\cdot b+2\cdot c=20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot(a+b+c)=20 \;/:2 \Rightarrow a+b+c=10.$$

Sada svaku nepoznanicu računamo iz sljedećih sustava jednadžbi:

- nepoznanica c

$$\left.\begin{array}{l} a+b=5 \\ a+b+c=10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b=5 \\ (a+b)+c=10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow 5+c=10 \Rightarrow c=10-5 \Rightarrow c=5.$$

- nepoznanica a

$$\left.\begin{array}{l} b+c=8 \\ a+b+c=10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b+c=8 \\ a+(b+c)=10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow a+8=10 \Rightarrow a=10-8 \Rightarrow a=2.$$

- nepoznanica b

$$\left.\begin{array}{l} c+a=7 \\ a+b+c=10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c+a=7 \\ b+(c+a)=10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow b+7=10 \Rightarrow b=10-7 \Rightarrow b=3.$$

Rješenje sustava jednadžbi je

(a, b, c) = (2, 3, 5)

pa je

$$a\cdot b\cdot c=2\cdot 3\cdot 5 \Rightarrow a\cdot b\cdot c=30.$$

2.inačica

Iz jedne jednadžbe sustava izračunamo jednu nepoznanicu i njezinu vrijednost uvrstimo u preostale jednadžbe sustava gdje se ta nepoznanica pojavljuje.

$$\left.\begin{array}{l} a+b=5 \\ b+c=8 \\ c+a=7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{na primjer, iz prve} \\ \text{jednadžbe izračunamo a} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b=5 \Rightarrow a=5-b \\ b+c=8 \\ c+a=7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} b+c=8 \\ c+5-b=7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b+c=8 \\ -b+c=7-5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b+c=8 \\ -b+c=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot c=10 \Rightarrow 2\cdot c=10 \;/:2 \Rightarrow c=5.$$

Sada računamo nepoznanicu b:

$$\left.\begin{array}{l} c=5 \\ b+c=8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow b+5=8 \Rightarrow b=8-5 \Rightarrow b=3.$$

Nepoznanica a iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} b=3 \\ a=5-b \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow a=5-3 \Rightarrow a=2.$$

Rješenje sustava jednadžbi je

(a, b, c) = (2, 3, 5)

pa je

$$a\cdot b\cdot c=2\cdot 3\cdot 5 \Rightarrow a\cdot b\cdot c=30.$$

Vježba 044

Ako je a + b = 8, b + c = 7, c + a = 5, koliko je a · b · c?

Rezultat: 30.

Zadatak 045 (Tonka, srednja škola)

Ako je a + 2 · b = 3, b + 2 · c = 5, c + 2 · a = 7, koliko je a + b + c?

Rješenje 045

1.inačica

Budući da je zadan sustav od tri jednadžbe sa tri nepoznanice a, b i c, a svaka se nepoznanica pojavljuje dva puta, zbrojit ćemo sve tri jednadžbe.

$$\left.\begin{array}{l} a+2\cdot b=3 \\ b+2\cdot c=5 \\ c+2\cdot a=7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{zbrojimo} \\ \text{jednadžbe}\end{array}\right] \Rightarrow a+2\cdot b+b+2\cdot c+c+2\cdot a=3+5+7 \Rightarrow 3\cdot a+3\cdot b+3\cdot c=15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot(a+b+c)=15 \;/:3 \Rightarrow a+b+c=5.$$

2.inačica

Iz jedne jednadžbe sustava izračunamo jednu nepoznanicu i njezinu vrijednost uvrstimo u preostale jednadžbe sustava gdje se ta nepoznanica pojavljuje.

$$\left.\begin{array}{l} a+2\cdot b=3 \\ b+2\cdot c=5 \\ c+2\cdot a=7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{na primjer, iz prve} \\ \text{jednadžbe izračunamo a}\end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+2\cdot b=3 \Rightarrow a=3-2\cdot b \\ b+2\cdot c=5 \\ c+2\cdot a=7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda} \\ \text{supstitucije}\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} b+2\cdot c=5 \\ c+2\cdot(3-2\cdot b)=7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b+2\cdot c=5 \\ c+6-4\cdot b=7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b+2\cdot c=5 \\ -4\cdot b+c=7-6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b+2\cdot c=5 \\ -4\cdot b+c=7-6 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} b+2\cdot c=5 \\ -4\cdot b+c=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata}\end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b+2\cdot c=5 \;/\cdot 4 \\ -4\cdot b+c=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4\cdot b+8\cdot c=20 \\ -4\cdot b+c=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9\cdot c=21 \Rightarrow 9\cdot c=21 \;/:9 \Rightarrow c=\frac{21}{9} \Rightarrow c=\frac{7}{3}.$$

Sada računamo nepoznanicu b:

$$\left.\begin{array}{l} c=\frac{7}{3} \\ b+2\cdot c=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda} \\ \text{supstitucije}\end{array}\right] \Rightarrow b+2\cdot\frac{7}{3}=5 \Rightarrow b+\frac{14}{3}=5 \Rightarrow b=5-\frac{14}{3} \Rightarrow b=\frac{1}{3}.$$

Nepoznanica a iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} b=\frac{1}{3} \\ a=3-2\cdot b \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda} \\ \text{supstitucije}\end{array}\right] \Rightarrow a=3-2\cdot\frac{1}{3} \Rightarrow a=3-\frac{2}{3} \Rightarrow a=\frac{7}{3}.$$

Tada zbroj iznosi:

$$a+b+c=\frac{7}{3}+\frac{1}{3}+\frac{7}{3}=\frac{15}{3}=5.$$

Vježba 045

Ako je a + 2 · b = 7, b + 2 · c = 3, c + 2 · a = 5, koliko je a + b + c?

Rezultat: 5.

Zadatak 046 (Tonka, srednja škola)

Zbrajanjem po dva od tri broja a, b i c dobijemo brojeve 3, 6, 19. Odredi brojeve a, b, c.

Rješenje 046

1.inačica

Budući da zbrajanjem po dva od tri broja a, b i c dobijemo brojeve 3, 6, 19, pišemo sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{l} a+b=3 \\ b+c=6 \\ a+c=19 \end{array}\right\}.$$

Zbrajanjem sve tri jednakosti dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} a+b=3 \\ b+c=6 \\ a+c=19 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zbrojimo} \\ \text{jednakosti} \end{array}\right] \Rightarrow a+b+b+c+a+c=3+6+19 \Rightarrow 2\cdot a+2\cdot b+2\cdot c=28 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot(a+b+c)=28 \Rightarrow 2\cdot(a+b+c)=28 \;/:2 \Rightarrow a+b+c=14.$$

Računamo broj a:

$$\left.\begin{array}{l} b+c=6 \\ a+b+c=14 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b+c=6 \\ a+(b+c)=14 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow a+6=14 \Rightarrow a=14-6 \Rightarrow a=8.$$

Računamo broj b:

$$\left.\begin{array}{l} a+c=19 \\ a+b+c=14 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+c=19 \\ b+(a+c)=14 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow b+19=14 \Rightarrow b=14-19 \Rightarrow b=-5.$$

Računamo broj c:

$$\left.\begin{array}{l} a+b=3 \\ a+b+c=14 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b=3 \\ (a+b)+c=14 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow 3+c=14 \Rightarrow c=14-3 \Rightarrow c=11.$$

Rezultat je:

$$(a,\ b,\ c)=(8,\ -5,\ 11).$$

2.inačica

Iz jedne jednadžbe sustava izračunamo jednu nepoznanicu i njezinu vrijednost uvrstimo u preostale jednadžbe sustava gdje se ta nepoznanica pojavljuje.

$$\left.\begin{array}{l} a+b=3 \\ b+c=6 \\ a+c=19 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{na primjer, iz prve} \\ \text{jednadžbe izračunamo b} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b=3 \Rightarrow b=3-a \\ b+c=6 \\ c+a=19 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3-a+c=6 \\ c+a=19 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -a+c=6-3 \\ a+c=19 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -a+c=3 \\ a+c=19 \end{array}\right\} \quad \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot c=22 \Rightarrow 2\cdot c=22 \;/:2 \Rightarrow c=11.$$

Sada računamo nepoznanicu b:

$$\left.\begin{array}{l} c=11 \\ b+c=6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow b+11=6 \Rightarrow b=6-11 \Rightarrow b=-5.$$

Nepoznanica a iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} b=-5 \\ a+b=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow a-5=3 \Rightarrow a=3+5 \Rightarrow a=8.$$

Rezultat je:

$$(a,\ b,\ c)=(8,\ -5,\ 11).$$

Vježba 046

Zbrajanjem po dva od tri broja a, b i c dobijemo brojeve 6, 12, 38. Odredi brojeve a, b, c.

Rezultat: $(a,\ b,\ c)=(16,\ -10,\ 22).$

Zadatak 047 (Klarchy Rokerica, srednja škola)

Frane i Duje brodovima prevoze turiste na cjelodnevni izlet do obližnjeg otoka. Frane je cijenu izleta po osobi naplaćivao za 80 kn više od Duje. Kada su to uočili, Frane je smanjio cijenu izleta za 10%, a Duje povećao za 15%. Nakon promjene cijena, izlet Dujinim brodom je za 8 kn po osobi skuplji od izleta Franinim brodom. Kolike su nove cijene izleta?

Rješenje 047

Ponovimo!

Stoti dio nekog broja zove se postotak. Postotak p je broj jedinica koji se uzima od 100 jedinica neke veličine. Piše se kao razlomak s nazivnikom 100. Na primjer,

$$3\% = \frac{3}{100} \quad , \quad 29\% = \frac{29}{100} \quad , \quad p\% = \frac{p}{100}.$$

Kako se računa p% od a? Odgovor je: $\frac{p}{100} \cdot a.$

Neka je a početna cijena. Ako se poveća p%, konačna cijena je:

$$a + \frac{p}{100} \cdot a = \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot a.$$

Neka je a početna cijena. Ako se smanji p%, konačna cijena je:

$$a - \frac{p}{100} \cdot a = \left(1 - \frac{p}{100}\right) \cdot a.$$

Zapišimo sljedeće rečenice u obliku matematičkih izraza:

- broj x je za a manji od broja y:

$$x + a = y \quad \text{ili} \quad y - x = a \quad \text{ili} \quad x = y - a$$

- broj x je za a veći od broja y:

$$x - a = y \quad \text{ili} \quad x - y = a \quad \text{ili} \quad x = y + a.$$



Frane

Duje



1.inačica

Označimo slovom x Franinu cijenu izleta po osobi, a slovom y Dujinu cijenu izleta po osobi. Frane je cijenu izleta po osobi naplaćivao za 80 kn više od Duje pa to pišemo u obliku jednadžbe:

$$x = y + 80 \;\Rightarrow\; x - y = 80.$$

Frane je smanjio cijenu izleta za 10% pa vrijedi:

$$x - \frac{10}{100} \cdot x = x - 0.1 \cdot x = 0.9 \cdot x.$$

Duje je povećao cijenu izleta za 15% pa slijedi:

$$y + \frac{15}{100} \cdot y = y + 1.15 \cdot y = 1.15 \cdot y.$$

Nakon toga je izlet Dujinim brodom za 8 kn skuplji od izleta Franinim brodom pa to zapisujemo sljedećom jednadžbom:

$$0.9 \cdot x + 8 = 1.15 \cdot y \;\Rightarrow\; 0.9 \cdot x - 1.15 \cdot y = -8.$$

Iz sustava od dvije linearne jednadžbe sa dvije nepoznanice dobiju se x i y.

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 80 \\ 0.9 \cdot x - 1.15 \cdot y = -8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x - y = 80 \;/\cdot(-0.9) \\ 0.9 \cdot x - 1.15 \cdot y = -8 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{rmcases} -0.9 \cdot x + 0.9 \cdot y = -72 \\ 0.9 \cdot x - 1.15 \cdot y = -8 \end{rmcases} \Rightarrow -0.25 \cdot y = -80 \; /: (-0.25) \Rightarrow y = 320.$$

Sada računamo x.

$$\begin{rmcases} y = 320 \\ x - y = 80 \end{rmcases} \Rightarrow x - 320 = 80 \Rightarrow x = 80 + 320 \Rightarrow x = 400.$$

Nove cijene izleta po osobi su:

- Franina cijena

$$0.9 \cdot x = 0.9 \cdot 400 \; kn = 360 \; kn,$$

- Dujina cijena

$$1.15 \cdot y = 1.15 \cdot 320 \; kn = 368 \; kn.$$

2.inačica

Označimo slovom x Franinu cijenu izleta po osobi. Budući da je Franina cijena po osobi naplaćena za 80 kn više od Dujine, slijedi da je Dujina cijena

$$x - 80.$$

Frane je smanjio cijenu izleta za 10% pa vrijedi:

$$x - \frac{10}{100} \cdot x = x - 0.1 \cdot x = 0.9 \cdot x.$$

Duje je povećao cijenu izleta za 15% pa slijedi:

$$x - 80 + \frac{15}{100} \cdot (x - 80) = x - 80 + 0.15 \cdot (x - 80) = x - 80 + 0.15 \cdot x - 12 = 1.15 \cdot x - 92.$$

Nakon toga je izlet Dujinim brodom za 8 kn skuplji od izleta Franinim brodom pa to zapisujemo sljedećom jednadžbom:

$$0.9 \cdot x + 8 = 1.15 \cdot x - 92.$$

Riješimo dobivenu linearnu jednadžbu.

$$0.9 \cdot x + 8 = 1.15 \cdot x - 92 \Rightarrow 0.9 \cdot x - 1.15 \cdot x = -92 - 8 \Rightarrow -0.25 \cdot x = -100 \; /: (-0.25) \Rightarrow x = 400.$$

Nove cijene izleta po osobi su:

- Franina cijena

$$0.9 \cdot x = 0.9 \cdot 400 \; kn = 360 \; kn,$$

- Dujina cijena

$$1.15 \cdot x - 92 = 1.15 \cdot 400 \; kn - 92 \; kn = 368 \; kn.$$

Vježba 047

Frane i Duje brodovima prevoze turiste na cjelodnevni izlet do obližnjeg otoka. Duje je cijenu izleta po osobi naplaćivao za 80 kn manje od Frane. Kada su to uočili, Frane je smanjio cijenu izleta za 10%, a Duje povećao za 15%. Nakon promjene cijena, izlet Franinim brodom je za 8 kn po osobi jeftiniji od izleta Dujinim brodom. Kolike su nove cijene izleta?

Rezultat: 360 kn , 368 kn.

Zadatak 048 (Tonka, srednja škola)

Nađi parametar a ako je uređeni par (2, 1) rješenje sustava jednadžbi

$$\begin{cases} a \cdot x - b \cdot y = 5 \\ b \cdot x + y = 3. \end{cases}$$

Rješenje 048

1.inačica

Budući da je uređeni par (2, 1) rješenje zadanog sustava, uvrstit ćemo umjesto x i y vrijednosti 2 i 1, i tako dobiti sustav jednadžbi u kojem su nepoznanice a i b:

$$\left.\begin{array}{l}(x,y)=(2,1)\\ a\cdot x-b\cdot y=5\\ b\cdot x+y=3\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a\cdot 2-b\cdot 1=5\\ b\cdot 2+1=3\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}2\cdot a-b=5\\ 2\cdot b+1=3\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}2\cdot a-b=5\\ 2\cdot b=3-1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}2\cdot a-b=5\\ 2\cdot b=2\ /:2\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}2\cdot a-b=5\\ b=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{metoda}\\ \text{supstitucije}\end{array}\right]\Rightarrow 2\cdot a-1=5\Rightarrow 2\cdot a=5+1\Rightarrow 2\cdot a=6\ /:2\Rightarrow a=3.$$

2.inačica

Budući da je uređeni par (2, 1) rješenje zadanog sustava, uvrstit ćemo umjesto x i y vrijednosti 2 i 1, i tako dobiti sustav jednadžbi u kojem su nepoznanice a i b:

$$\left.\begin{array}{l}(x,y)=(2,1)\\ a\cdot x-b\cdot y=5\\ b\cdot x+y=3\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a\cdot 2-b\cdot 1=5\\ b\cdot 2+1=3\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}2\cdot a-b=5\\ 2\cdot b+1=3\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}2\cdot a-b=5\\ 2\cdot b=3-1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}2\cdot a-b=5\\ 2\cdot b=2\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{metoda suprotnih}\\ \text{koeficijenata}\end{array}\right]\Rightarrow\left.\begin{array}{l}2\cdot a-b=5\ /\cdot 2\\ 2\cdot b=2\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}4\cdot a-2\cdot b=10\\ 2\cdot b=2\end{array}\right\}\Rightarrow 4\cdot a=12\ /:4\Rightarrow a=3.$$

Vježba 048

Nađi parametar b ako je uređeni par (2, 1) rješenje sustava jednadžbi

$$\begin{cases}a\cdot x-b\cdot y=5\\ b\cdot x+y=3.\end{cases}$$

Rezultat: 1.

Zadatak 049 (Malena, gimnazija)

Riješi u skupu R nejednadžbu i skup rješenja skiciraj na brojevnom pravcu: $\frac{1}{x}>5.$

Rješenje 049

Ponovimo!

$$a>b\ ,\ c>0\Rightarrow a\cdot c>b\cdot c\quad,\quad a>b\ ,\ c<0\Rightarrow a\cdot c<b\cdot c\quad,\quad a\in R\setminus\{0\}\Rightarrow a^2>0.$$

$$a\cdot b>0\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}a>0\\ b>0\end{array}\right\}\text{ ili }\left.\begin{array}{l}a<0\\ b<0\end{array}\right\}\quad,\quad\frac{a}{b}>0\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}a>0\\ b>0\end{array}\right\}\text{ ili }\left.\begin{array}{l}a<0\\ b<0\end{array}\right\}.$$

1.inačica

Uočimo da x ne smije biti jednak nuli:

$$x\neq 0.$$

$$\frac{1}{x}>5\Rightarrow\frac{1}{x}-5>0\Rightarrow\frac{1-5\cdot x}{x}>0.$$

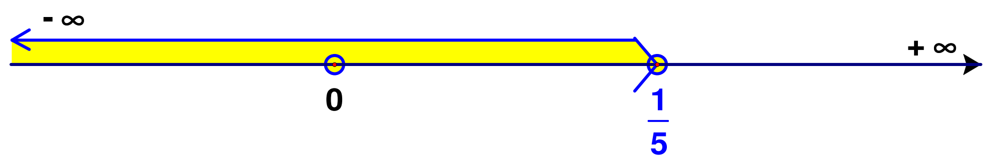
Ova nejednakost ispunjena je u dva slučaja.

1.slučaj

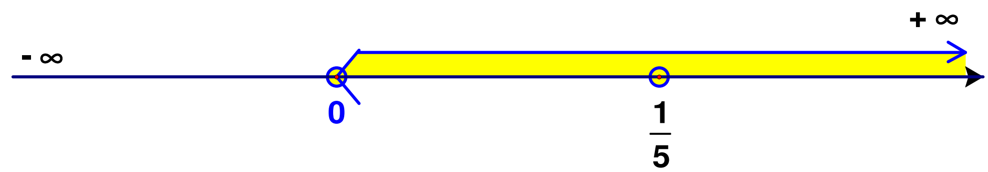
$$\frac{1-5\cdot x}{x}>0\Rightarrow\left.\begin{array}{l}1-5\cdot x>0\\ x>0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-5\cdot x>-1\\ x>0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-5\cdot x>-1\ /:(-5)\\ x>0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x<\frac{1}{5}\\ x>0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{tražimo presjek,}\\ \text{zajednički dio}\end{array}\right]\Rightarrow x\in\left\langle 0,\frac{1}{5}\right\rangle\Rightarrow 0<x<\frac{1}{5}.$$

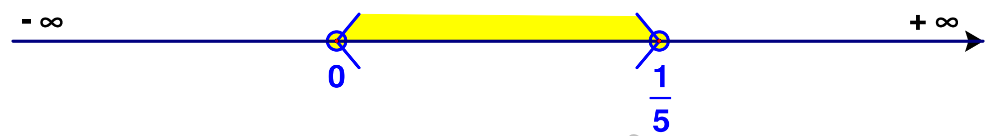
$x < \frac{1}{5}$



$x > 0$



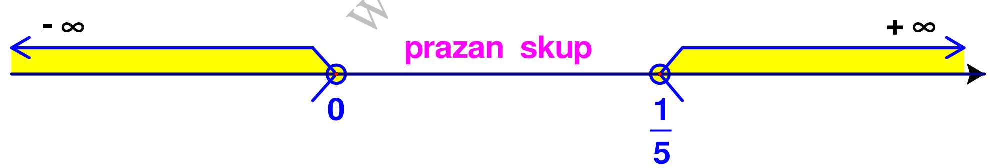
$$x \in \left\langle 0, \frac{1}{5} \right\rangle \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{5}$$



2.slučaj

$$\frac{1-5\cdot x}{x} > 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} 1-5\cdot x < 0 \\ x < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -5\cdot x < -1 \\ x < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -5\cdot x < -1 \;/ : (-5) \\ x < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x > \frac{1}{5} \\ x < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{tražimo presjek,} \\ \text{zajednički dio} \end{bmatrix} \Rightarrow \varnothing \;,\; \text{prazan skup.}$$



Rješenje je, dakle,

$$x \in \left\langle 0, \frac{1}{5} \right\rangle.$$

2.inačica

Uočimo da x ne smije biti jednak nuli:

$$x \neq 0.$$

$$\frac{1}{x} > 5 \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{množimo nejednakost} \\ \text{pozitivnim brojem } x^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{x} > 5 \;/ \cdot x^2 \Rightarrow x > 5\cdot x^2 \Rightarrow x - 5\cdot x^2 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\cdot(1-5\cdot x) > 0.$$

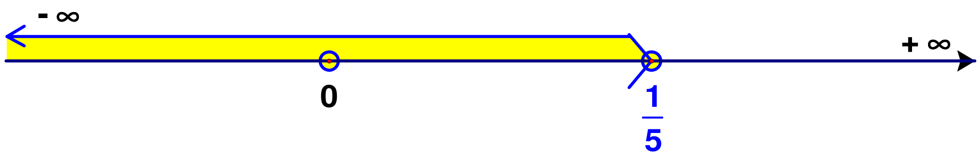
Ova nejednakost ispunjena je u dva slučaja.

1.slučaj

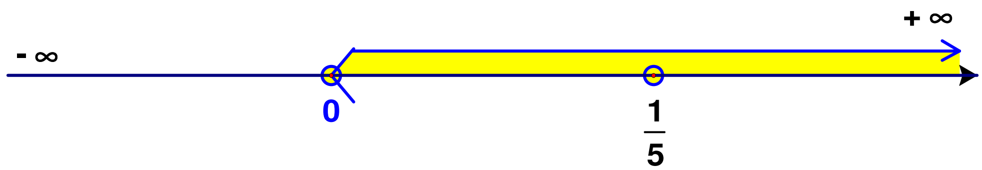
$$x\cdot(1-5\cdot x) > 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} 1-5\cdot x > 0 \\ x > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -5\cdot x > -1 \\ x > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -5\cdot x > -1 \;/ : (-5) \\ x > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x < \frac{1}{5} \\ x > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{tražimo presjek,} \\ \text{zajednički dio} \end{bmatrix} \Rightarrow x \in \left\langle 0, \frac{1}{5} \right\rangle \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{5}.$$

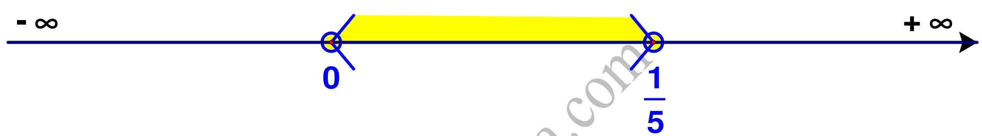
$x < \frac{1}{5}$



$x > 0$



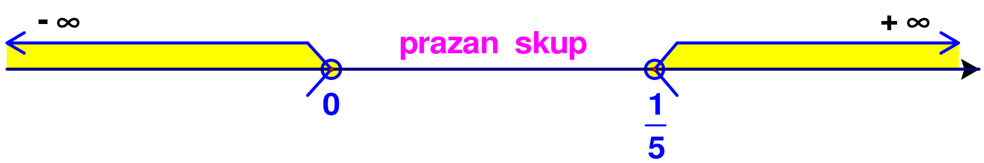
$x \in \left\langle 0, \frac{1}{5} \right\rangle \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{5}$



2.slučaj

$$x \cdot (1 - 5 \cdot x) > 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} 1 - 5 \cdot x < 0 \\ x < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -5 \cdot x < -1 \\ x < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -5 \cdot x < -1 \; /:(-5) \\ x < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x > \frac{1}{5} \\ x < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{tražimo presjek,} \\ \text{zajednički dio} \end{bmatrix} \Rightarrow \varnothing \;, \;\text{prazan skup}.$$



Rješenje je, dakle,

$$x \in \left\langle 0, \frac{1}{5} \right\rangle.$$

Vježba 049

Riješi u skupu R nejednadžbu i skup rješenja skiciraj na brojevnom pravcu: $\frac{1}{x} > 3.$

Rezultat: $x \in \left\langle 0, \frac{1}{3} \right\rangle.$

Zadatak 050 (Sena, gimnazija)

Ako se brojniku nekog razlomka doda 3, dobije se 2, a ako se od brojnika istog razlomka oduzme 5, dobije se 1. Koji je to razlomak?

Rješenje 050

Označimo traženi razlomak sa $\frac{x}{y}$.

1.inačica

Postavimo sustav jednadžbi.

"Ako se brojniku nekog razlomka doda 3, dobije se 2..."

$$\frac{x+3}{y}=2 \quad , \quad y \neq 0,$$

"... ako se od brojnika istog razlomka oduzme 5, dobije se 1."

$$\frac{x-5}{y}=1 \quad , \quad y \neq 0.$$

Iz sustava jednadžbi slijedi:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x+3}{y}=2 \\ \frac{x-5}{y}=1\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\frac{x+3}{y}=2 \; / \cdot y \\ \frac{x-5}{y}=1 \; / \cdot y\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x+3=2 \cdot y \\ x-5=y\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x-2 \cdot y=-3 \\ x-y=5\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata}\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}x-2 \cdot y=-3 \; / \cdot (-1) \\ x-y=5\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}-x+2 \cdot y=3 \\ x-y=5\end{array}\right\} \Rightarrow y=8 \Rightarrow \left.\begin{array}{l}y=8 \\ x-y=5\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-8=5 \Rightarrow x=5+8 \Rightarrow x=13.$$

Traženi razlomak iznosi $\frac{13}{8}$.

2.inačica

Postavimo sustav jednadžbi.

"Ako se brojniku nekog razlomka doda 3, dobije se 2..."

$$\frac{x+3}{y}=2 \quad , \quad y \neq 0,$$

"... ako se od brojnika istog razlomka oduzme 5, dobije se 1."

$$\frac{x-5}{y}=1 \quad , \quad y \neq 0.$$

Iz sustava jednadžbi slijedi:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x+3}{y}=2 \\ \frac{x-5}{y}=1\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe}\end{array}\right] \Rightarrow \frac{\frac{x+3}{y}}{\frac{x-5}{y}}=\frac{2}{1} \Rightarrow \frac{\frac{x+3}{y}}{\frac{x-5}{y}}=2 \Rightarrow \frac{x+3}{x-5}=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x+3}{x-5}=2 \; / \cdot (x-5) \Rightarrow x+3=2 \cdot (x-5) \Rightarrow x+3=2 \cdot x-10 \Rightarrow x-2 \cdot x=-10-3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x=-13 \; / \cdot (-1) \Rightarrow x=13 \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x=13 \\ \frac{x+3}{y}=2\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{13+3}{y}=2 \Rightarrow \frac{16}{y}=2 \; / \cdot \frac{y}{2} \Rightarrow y=8.$$

Traženi razlomak iznosi $\frac{13}{8}$.

Vježba 050

Ako se brojniku nekog razlomka doda 1, dobije se 3, a ako se od brojnika istog razlomka oduzme 1, dobije se 2. Koji je to razlomak?

Rezultat: $\frac{5}{2}.$

Zadatak 051 (YeEaAhH, elektrotehnička škola)

Riješi sustav jednadžbi: $\begin{cases} 2 \cdot a - 3 \cdot b - c = 4 \\ \frac{1}{2} \cdot a - 2 \cdot b - \frac{1}{3} \cdot c = 0 \\ a + b + c = 0. \end{cases}$

Rješenje 051

$$\left.\begin{aligned} 2 \cdot a - 3 \cdot b - c = 4 \\ \frac{1}{2} \cdot a - 2 \cdot b - \frac{1}{3} \cdot c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2 \cdot a - 3 \cdot b - c = 4 \\ \frac{1}{2} \cdot a - 2 \cdot b - \frac{1}{3} \cdot c = 0 \ / \cdot 6 \\ a + b + c = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2 \cdot a - 3 \cdot b - c = 4 \\ 3 \cdot a - 12 \cdot b - 2 \cdot c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{aligned}\right\}.$$

U nekoj jednadžbi izračunat ćemo jednu nepoznanicu. Uvijek nastojimo naći nepoznanicu uz koju stoji najmanji koeficijent po apsolutnoj vrijednosti. Vrijednost za nađenu nepoznanicu uvrštavamo u druge jednadžbe. Na primjer, iz treće jednadžbe izračunat ćemo nepoznanicu c i njezinu vrijednost uvrstiti u prvu i drugu jednadžbu.

$$\left.\begin{aligned} 2 \cdot a - 3 \cdot b - c = 4 \\ 3 \cdot a - 12 \cdot b - 2 \cdot c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2 \cdot a - 3 \cdot b - c = 4 \\ 3 \cdot a - 12 \cdot b - 2 \cdot c = 0 \\ c = -a - b \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2 \cdot a - 3 \cdot b - (-a - b) = 4 \\ 3 \cdot a - 12 \cdot b - 2 \cdot (-a - b) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} 2 \cdot a - 3 \cdot b + a + b = 4 \\ 3 \cdot a - 12 \cdot b + 2 \cdot a + 2 \cdot b = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 3 \cdot a - 2 \cdot b = 4 \\ 5 \cdot a - 10 \cdot b = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 3 \cdot a - 2 \cdot b = 4 \\ 5 \cdot a - 10 \cdot b = 0 \ / : 5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 3 \cdot a - 2 \cdot b = 4 \\ a - 2 \cdot b = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Dobili smo sustav od dvije jednadžbe sa dvije nepoznanice a i b. Riješit ćemo ga metodom suprotnih koeficijenata. U obje jednadžbe uz istu nepoznanicu nastojimo dobiti suprotne koeficijente. To su dva broja čiji je zbroj jednak 0. Da bismo dobili suprotne koeficijente moramo ili jednu ili obje jednadžbe pomnožiti odgovarajućim brojevima.

$$\left.\begin{aligned} 3 \cdot a - 2 \cdot b = 4 \\ a - 2 \cdot b = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 3 \cdot a - 2 \cdot b = 4 \\ a - 2 \cdot b = 0 \ / \cdot (-1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 3 \cdot a - 2 \cdot b = 4 \\ -a + 2 \cdot b = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} 3 \cdot a - 2 \cdot b = 4 \\ -a + 2 \cdot b = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2 \cdot a = 4 \Rightarrow 2 \cdot a = 4 \ / : 2 \Rightarrow a = 2.$$

Nepoznanicu b nađemo tako da a = 2 uvrstimo u drugu jednadžbu

$$\left.\begin{aligned} -a + 2 \cdot b = 0 \\ a = 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow -2 + 2 \cdot b = 0 \Rightarrow 2 \cdot b = 2 \Rightarrow 2 \cdot b = 2 \ / : 2 \Rightarrow b = 1.$$

Sada računamo nepoznanicu c.

$$\left.\begin{aligned} c = -a - b \\ a = 2 \\ b = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c = -2 - 1 \Rightarrow c = -3.$$

Rješenje sustava jednadžbi je uređena trojka:

$$(a, b, c) = (2, 1, -3).$$

Vježba 051

Riješi sustav jednadžbi: $\begin{cases} 5\cdot a-b-c=0 \\ a+2\cdot b+3\cdot c=14 \\ 4\cdot a+3\cdot b+2\cdot c=16. \end{cases}$

Rezultat: $(a,\ b,\ c)=(1,\ 2,\ 3).$

Zadatak 052 (Kiki, gimnazija)

Riješi sustav jednadžbi: $\begin{cases} \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)=0.3+x-\frac{y}{5} \\ \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)=0.4+x+\frac{y}{5}. \end{cases}$

Rješenje 052

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)=0.3+x-\frac{y}{5} \\ \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)=0.4+x+\frac{y}{5} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{zbrojimo} \\ \text{jednadžbe}\end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)=0.3+x-\frac{y}{5}+0.4+x+\frac{y}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}+\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)=0.3+x-\frac{y}{5}+0.4+x+\frac{y}{5} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}+\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)=0.3+x-\frac{y}{5}+0.4+x+\frac{y}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot x=0.7+2\cdot x \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot x=0.7+2\cdot x \ /\cdot 2 \Rightarrow x=1.4+4\cdot x \Rightarrow x-4\cdot x=1.4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3\cdot x=1.4 \Rightarrow -3\cdot x=1.4 \ /:(-3) \Rightarrow x=-\frac{1.4}{3} \Rightarrow x=-\frac{14}{30} \Rightarrow x=-\frac{7}{15}.$$

Vrijednost nepoznanice x uvrstimo u jednu jednadžbu da bismo izračunali y. Na primjer, uvrstit ćemo u drugu jednadžbu.

$$\left.\begin{aligned} x=-\frac{7}{15} \\ \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)=0.4+x+\frac{y}{5} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-\frac{7}{15}}{2}+\frac{y}{3}\right)=0.4-\frac{7}{15}+\frac{y}{5} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{7}{30}+\frac{y}{3}\right)=\frac{4}{10}-\frac{7}{15}+\frac{y}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{7}{60}+\frac{y}{6}=\frac{2}{5}-\frac{7}{15}+\frac{y}{5} \Rightarrow -\frac{7}{60}+\frac{y}{6}=\frac{2}{5}-\frac{7}{15}+\frac{y}{5} \ /\cdot 60 \Rightarrow -7+10\cdot y=24-28+12\cdot y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10\cdot y-12\cdot y=24-28+7 \Rightarrow -2\cdot y=3 \Rightarrow -2\cdot y=3 \ /:(-2) \Rightarrow y=-\frac{3}{2}.$$

Rješenje sustava je uređeni par:

$$(x,\ y)=\left(-\frac{7}{15},\ -\frac{3}{2}\right).$$

2.inačica

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)=0.3+x-\frac{y}{5}\\ \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)=0.4+x+\frac{y}{5}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)=0.3+x-\frac{y}{5}\ /\cdot 2\\ \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)=0.4+x+\frac{y}{5}\ /\cdot 2\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=0.6+2\cdot x-\frac{2\cdot y}{5}\\ \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=0.8+2\cdot x+\frac{2\cdot y}{5}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=0.6+2\cdot x-\frac{2\cdot y}{5}\ /\cdot 30\\ \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=0.8+2\cdot x+\frac{2\cdot y}{5}\ /\cdot 30\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}15\cdot x-10\cdot y=18+60\cdot x-12\cdot y\\ 15\cdot x+10\cdot y=24+60\cdot x+12\cdot y\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}15\cdot x-10\cdot y-60\cdot x+12\cdot y=18\\ 15\cdot x+10\cdot y-60\cdot x-12\cdot y=24\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-45\cdot x+2\cdot y=18\\ -45\cdot x-2\cdot y=24\end{array}\right\}.$$

Dobili smo sustav od dvije jednadžbe sa dvije nepoznanice x i y. Riješit ćemo ga metodom suprotnih koeficijenata. U obje jednadžbe uz istu nepoznanicu imamo suprotne koeficijente. To su dva broja čiji je zbroj jednak 0.

$$\left.\begin{array}{l}-45\cdot x+2\cdot y=18\\ -45\cdot x-2\cdot y=24\end{array}\right\}\Rightarrow -90\cdot x=42\Rightarrow -90\cdot x=42\ /:(-90)\Rightarrow x=-\frac{42}{90}\Rightarrow x=-\frac{7}{15}.$$

Nepoznanicu y nađemo tako da x uvrstimo u drugu jednadžbu.

$$\left.\begin{array}{l}x=-\frac{7}{15}\\ \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)=0.4+x+\frac{y}{5}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-\frac{7}{15}}{2}+\frac{y}{3}\right)=0.4-\frac{7}{15}+\frac{y}{5}\Rightarrow\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{7}{30}+\frac{y}{3}\right)=\frac{4}{10}-\frac{7}{15}+\frac{y}{5}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{7}{60}+\frac{y}{6}=\frac{2}{5}-\frac{7}{15}+\frac{y}{5}\Rightarrow -\frac{7}{60}+\frac{y}{6}=\frac{2}{5}-\frac{7}{15}+\frac{y}{5}\ /\cdot 60\Rightarrow -7+10\cdot y=24-28+12\cdot y\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10\cdot y-12\cdot y=24-28+7\Rightarrow -2\cdot y=3\Rightarrow -2\cdot y=3\ /:(-2)\Rightarrow y=-\frac{3}{2}.$$

Rješenje sustava je uređeni par:

$$(x,\ y)=\left(-\frac{7}{15},\ -\frac{3}{2}\right).$$

Vježba 052

Riješi sustav jednadžbi: $\begin{cases}\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=0.6+2\cdot x-\frac{2\cdot y}{5}\\ \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=0.8+2\cdot x+\frac{2\cdot y}{5}.\end{cases}$

Rezultat: $(x,\ y)=\left(-\frac{7}{15},\ -\frac{3}{2}\right).$

Zadatak 053 (Ljiljana, srednja škola)

Odredi sve vrijednosti parametra $a\in R$ tako da svako rješenje x, y sustava jednadžbi

$$\begin{cases}x+y=a\\ 2\cdot x-y=3\end{cases}$$

zadovoljava uvjet x > y.

Rješenje 053

Ponovimo!

Parametar: veličina o kojoj ovisi funkcija ili oblik krivulje.

Riješimo sustav jednadžbi.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=a \\ 2\cdot x-y=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata}\end{array}\right] \Rightarrow 3\cdot x=a+3 \Rightarrow 3\cdot x=a+3 \;/:3 \Rightarrow x=\frac{a+3}{3}.$$

Sada računamo nepoznanicu y.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=a \\ x=\frac{a+3}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda} \\ \text{supstitucije}\end{array}\right] \Rightarrow \frac{a+3}{3}+y=a \Rightarrow y=a-\frac{a+3}{3} \Rightarrow y=\frac{3\cdot a-(a+3)}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{3\cdot a-a-3}{3} \Rightarrow y=\frac{2\cdot a-3}{3}.$$

Budući da x i y moraju zadovoljavati uvjet x > y, slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{a+3}{3} \;,\; y=\frac{2\cdot a-3}{3} \\ x>y \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a+3}{3}>\frac{2\cdot a-3}{3} \Rightarrow \frac{a+3}{3}>\frac{2\cdot a-3}{3} \;/\cdot 3 \Rightarrow a+3>2\cdot a-3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a-2\cdot a>-3-3 \Rightarrow -a>-6 \Rightarrow -a>-6 \;/\cdot(-1) \Rightarrow a<6 \Rightarrow a\in\langle -\infty, 6\rangle.$$



Vježba 053

Odredi vrijednost parametra $a\in R$ tako da rješenje x, y sustava jednadžbi

$$\begin{cases} x+y=a \\ 2\cdot x-y=3 \end{cases}$$

zadovoljava uvjet x = y.

Rezultat: a = 6.

Zadatak 054 (Rocky, gimnazija)

Riješi sustav jednadžbi:

$$\begin{cases} x\cdot(y+z)=36 \\ y\cdot(z+x)=50 \\ z\cdot(x+y)=56. \end{cases}$$

Rješenje 054

Ponovimo!

$$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Zbrojimo jednadžbe i od dobivenog zbroja oduzmemo posebno svaku jednadžbu.

$$\left.\begin{array}{r} x\cdot(y+z)=36 \\ y\cdot(z+x)=50 \\ z\cdot(x+y)=56 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{zbrojimo} \\ \text{jednadžbe}\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\cdot(y+z)+y\cdot(z+x)+z\cdot(x+y)=142 \Rightarrow x\cdot y+x\cdot z+y\cdot z+y\cdot x+z\cdot x+z\cdot y=142 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x\cdot y+2\cdot x\cdot z+2\cdot y\cdot z=142 \Rightarrow 2\cdot x\cdot y+2\cdot x\cdot z+2\cdot y\cdot z=142 \;/:2 \Rightarrow x\cdot y+x\cdot z+y\cdot z=71.$$

- $$\left.\begin{array}{l} x\cdot y+x\cdot z+y\cdot z=71 \\ x\cdot(y+z)=36 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x\cdot y+x\cdot z+y\cdot z=71 \\ x\cdot y+x\cdot z=36 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{oduzmemo} \\ \text{jednadžbe}\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x\cdot y+x\cdot z+y\cdot z-x\cdot y-x\cdot z=35\ \Rightarrow\ x\cdot y+x\cdot z+y\cdot z-x\cdot y-x\cdot z=35\ \Rightarrow\ y\cdot z=35.$$

- $$\left.\begin{matrix} x\cdot y+x\cdot z+y\cdot z=71 \\ y\cdot(z+x)=50 \end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix} x\cdot y+x\cdot z+y\cdot z=71 \\ y\cdot z+y\cdot x=50 \end{matrix}\right\}\Rightarrow \begin{bmatrix}\text{oduzmemo}\\ \text{jednadžbe}\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x\cdot y+x\cdot z+y\cdot z-y\cdot z-y\cdot x=21\ \Rightarrow\ x\cdot y+x\cdot z+y\cdot z-y\cdot z-y\cdot x=21\ \Rightarrow\ x\cdot z=21.$$

- $$\left.\begin{matrix} x\cdot y+x\cdot z+y\cdot z=71 \\ z\cdot(x+y)=56 \end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix} x\cdot y+x\cdot z+y\cdot z=71 \\ z\cdot x+z\cdot y=56 \end{matrix}\right\}\Rightarrow \begin{bmatrix}\text{oduzmemo}\\ \text{jednadžbe}\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x\cdot y+x\cdot z+y\cdot z-z\cdot x-z\cdot y=15\ \Rightarrow\ x\cdot y+x\cdot z+y\cdot z-z\cdot x-z\cdot y=15\ \Rightarrow\ x\cdot y=15.$$

Dobili smo ekvivalentan sustav jednadžbi.

$$\left.\begin{matrix} y\cdot z=35 \\ z\cdot x=21 \\ x\cdot y=15 \end{matrix}\right\}.$$

Tražimo rješenja sustava.

1.inačica

$$\left.\begin{matrix} y\cdot z=35 \\ z\cdot x=21 \\ x\cdot y=15 \end{matrix}\right\}\Rightarrow \begin{bmatrix}\text{pomnožimo}\\ \text{jednadžbe}\end{bmatrix}\Rightarrow y\cdot z\cdot z\cdot x\cdot x\cdot y=35\cdot 21\cdot 15\ \Rightarrow\ x^2\cdot y^2\cdot z^2=11025\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (x\cdot y\cdot z)^2=11025\ \Rightarrow\ (x\cdot y\cdot z)^2=11025\ /\sqrt{\ }\ \Rightarrow\ x\cdot y\cdot z=\pm\sqrt{11025}\ \Rightarrow\ x\cdot y\cdot z=\pm 105.$$

Rješenja sustava glase.

- Prvo rješenje

$$\left.\begin{matrix} x\cdot y\cdot z=-105 \\ y\cdot z=35 \end{matrix}\right\}\Rightarrow \begin{bmatrix}\text{podijelimo}\\ \text{jednadžbe}\end{bmatrix}\Rightarrow \frac{x\cdot y\cdot z}{y\cdot z}=-\frac{105}{35}\ \Rightarrow\ \frac{x\cdot y\cdot z}{y\cdot z}=-3\ \Rightarrow\ x_1=-3,$$

$$\left.\begin{matrix} x\cdot y\cdot z=-105 \\ z\cdot x=21 \end{matrix}\right\}\Rightarrow \begin{bmatrix}\text{podijelimo}\\ \text{jednadžbe}\end{bmatrix}\Rightarrow \frac{x\cdot y\cdot z}{z\cdot x}=-\frac{105}{21}\ \Rightarrow\ \frac{x\cdot y\cdot z}{z\cdot x}=-5\ \Rightarrow\ y_1=-5,$$

$$\left.\begin{matrix} x\cdot y\cdot z=-105 \\ x\cdot y=15 \end{matrix}\right\}\Rightarrow \begin{bmatrix}\text{podijelimo}\\ \text{jednadžbe}\end{bmatrix}\Rightarrow \frac{x\cdot y\cdot z}{x\cdot y}=-\frac{105}{15}\ \Rightarrow\ \frac{x\cdot y\cdot z}{x\cdot y}=-7\ \Rightarrow\ z_1=-7.$$

Rješenje sustava je uređena trojka

$$(x_1,\ y_1,\ z_1)=(-3,\ -5,\ -7).$$

- Drugo rješenje

$$\left.\begin{matrix} x\cdot y\cdot z=105 \\ y\cdot z=35 \end{matrix}\right\}\Rightarrow \begin{bmatrix}\text{podijelimo}\\ \text{jednadžbe}\end{bmatrix}\Rightarrow \frac{x\cdot y\cdot z}{y\cdot z}=\frac{105}{35}\ \Rightarrow\ \frac{x\cdot y\cdot z}{y\cdot z}=3\ \Rightarrow\ x_2=3,$$

$$\left.\begin{matrix} x\cdot y\cdot z=105 \\ z\cdot x=21 \end{matrix}\right\}\Rightarrow \begin{bmatrix}\text{podijelimo}\\ \text{jednadžbe}\end{bmatrix}\Rightarrow \frac{x\cdot y\cdot z}{z\cdot x}=\frac{105}{21}\ \Rightarrow\ \frac{x\cdot y\cdot z}{z\cdot x}=5\ \Rightarrow\ y_2=5,$$

$$\left.\begin{matrix} x\cdot y\cdot z=105 \\ x\cdot y=15 \end{matrix}\right\}\Rightarrow \begin{bmatrix}\text{podijelimo}\\ \text{jednadžbe}\end{bmatrix}\Rightarrow \frac{x\cdot y\cdot z}{x\cdot y}=\frac{105}{15}\ \Rightarrow\ \frac{x\cdot y\cdot z}{x\cdot y}=7\ \Rightarrow\ z_2=7.$$

Rješenje sustava je uređena trojka

$$(x_2,\ y_2,\ z_2)=(3,\ 5,\ 7).$$

2.inačica

Prvu jednadžbu sustava podijelimo sa drugom i trećom jednadžbom.

$$\left.\begin{matrix} y\cdot z=35 \\ z\cdot x=21 \\ x\cdot y=15 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \frac{y\cdot z}{z\cdot x}=\frac{35}{21} \\ \frac{y\cdot z}{x\cdot y}=\frac{35}{15} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \frac{y\cdot z}{z\cdot x}=\frac{5}{3} \\ \frac{y\cdot z}{x\cdot y}=\frac{7}{3} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \frac{y}{x}=\frac{5}{3} \\ \frac{z}{x}=\frac{7}{3} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \frac{y}{x}=\frac{5}{3} \ /\cdot x \\ \frac{z}{x}=\frac{7}{3} \ /\cdot x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y=\frac{5}{3}\cdot x \\ z=\frac{7}{3}\cdot x \end{matrix}\right\}.$$

Računamo nepoznanicu x.

$$\left.\begin{matrix} x\cdot(y+z)=36 \\ y=\frac{5}{3}\cdot x \ , \ z=\frac{7}{3}\cdot x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{bmatrix} \Rightarrow x\cdot\left(\frac{5}{3}\cdot x+\frac{7}{3}\cdot x\right)=36 \Rightarrow x\cdot\frac{12}{3}\cdot x=36 \Rightarrow 4\cdot x^2=36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot x^2=36 \ /:4 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x^2=9 \ /\sqrt{\ } \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{9} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=-3 \\ x_2=3 \end{matrix}\right\}.$$

Računamo nepoznanicu y.

$$\left.\begin{matrix} x_1=-3 \\ x_2=3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[y=\frac{5}{3}\cdot x\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} y_1=\frac{5}{3}\cdot(-3) \\ y_2=\frac{5}{3}\cdot 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y_1=\frac{5}{3}\cdot(-3) \\ y_2=\frac{5}{3}\cdot 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y_1=-5 \\ y_2=5 \end{matrix}\right\}.$$

Računamo nepoznanicu z.

$$\left.\begin{matrix} x_1=-3 \\ x_2=3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[z=\frac{7}{3}\cdot x\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} z_1=\frac{7}{3}\cdot(-3) \\ z_2=\frac{7}{3}\cdot 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} z_1=\frac{7}{3}\cdot(-3) \\ z_2=\frac{7}{3}\cdot 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} z_1=-7 \\ z_2=7 \end{matrix}\right\}.$$

Rješenja sustava su uređene trojke:

$$(x_1,\ y_1,\ z_1)=(-3,\ -5,\ -7) \quad , \quad (x_2,\ y_2,\ z_2)=(3,\ 5,\ 7).$$

Vježba 054

Riješi sustav jednadžbi:

$$\begin{cases} x\cdot(y+z)=5 \\ y\cdot(z+x)=8 \\ z\cdot(x+y)=9. \end{cases}$$

Rezultat: $(x_1,\ y_1,\ z_1)=(-1,\ -2,\ -3) \quad , \quad (x_2,\ y_2,\ z_2)=(1,\ 2,\ 3).$

Zadatak 055 (Rocky, gimnazija)

Riješi sustav jednadžbi:

$$\begin{cases} x\cdot(x+y+z)=6 \\ y\cdot(x+y+z)=12 \\ z\cdot(x+y+z)=18. \end{cases}$$

Rješenje 055

Ponovimo!

Drugu i treću jednadžbu sustava podijelimo sa prvom jednadžbom.

$$\left.\begin{aligned} x\cdot(x+y+z)&=6\\ y\cdot(x+y+z)&=12\\ z\cdot(x+y+z)&=18\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{y\cdot(x+y+z)}{x\cdot(x+y+z)}&=\frac{12}{6}\\ \frac{z\cdot(x+y+z)}{x\cdot(x+y+z)}&=\frac{18}{6}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{y\cdot(x+y+z)}{x\cdot(x+y+z)}&=2\\ \frac{z\cdot(x+y+z)}{x\cdot(x+y+z)}&=3\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{y\cdot(x+y+z)}{x\cdot(x+y+z)}&=2\\ \frac{z\cdot(x+y+z)}{x\cdot(x+y+z)}&=3\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{y}{x}&=2\\ \frac{z}{x}&=3\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{y}{x}&=2\ /\cdot x\\ \frac{z}{x}&=3\ /\cdot x\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} y&=2\cdot x\\ z&=3\cdot x\end{aligned}\right\}.$$

Računamo nepoznanicu x.

$$\left.\begin{aligned} x\cdot(x+y+z)&=6\\ y&=2\cdot x\\ z&=3\cdot x\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix}\text{metoda}\\ \text{supstitucije}\end{matrix}\right] \Rightarrow x\cdot(x+2\cdot x+3\cdot x)=6 \Rightarrow x\cdot 6\cdot x=6 \Rightarrow 6\cdot x^2=6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\cdot x^2=6\ /:6 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x^2=1\ /\sqrt{\ } \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{1} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_1&=-1\\ x_2&=1\end{aligned}\right\}.$$

Računamo nepoznanicu y.

$$\left.\begin{aligned} x_1&=-1\\ x_2&=1\end{aligned}\right\} \Rightarrow [\,y=2\cdot x\,] \Rightarrow \left.\begin{aligned} y_1&=2\cdot(-1)\\ y_2&=2\cdot 1\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} y_1&=-2\\ y_2&=2\end{aligned}\right\}.$$

Računamo nepoznanicu z.

$$\left.\begin{aligned} x_1&=-1\\ x_2&=1\end{aligned}\right\} \Rightarrow [\,z=3\cdot x\,] \Rightarrow \left.\begin{aligned} z_1&=3\cdot(-1)\\ z_2&=3\cdot 1\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} z_1&=-3\\ z_2&=3\end{aligned}\right\}.$$

Rješenja sustava su uređene trojke:

$$(x_1,\ y_1,\ z_1)=(-1,\ -2,\ -3) \quad , \quad (x_2,\ y_2,\ z_2)=(1,\ 2,\ 3).$$

Vježba 055

Riješi sustav jednadžbi:

$$\begin{cases} x\cdot(x+y+z)=12\\ y\cdot(x+y+z)=48\\ z\cdot(x+y+z)=72.\end{cases}$$

Rezultat: $(x_1,\ y_1,\ z_1)=(-2,\ -4,\ -6) \quad , \quad (x_2,\ y_2,\ z_2)=(2,\ 4,\ 6).$

Zadatak 056 (Rocky, gimnazija)

Ne rješavajući sustav jednadžbi nađi x · y · z.

$$\begin{cases} x+y+z=1\\ x^2+y^2+z^2=2\\ x^3+y^3+z^3=3.\end{cases}$$

Rješenje 056

Ponovimo!

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 \quad , \quad (a+b)^3 = a^3 + 3\cdot a^2\cdot b + 3\cdot a\cdot b^2 + b^3.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad , \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

Izvedimo identitet pomoću kojega računamo umnožak x · y · z.

$$(x+y+z)^3 = ((x+y)+z)^3 = (x+y)^3 + 3\cdot(x+y)^2\cdot z + 3\cdot(x+y)\cdot z^2 + z^3 =$$

$$= x^3 + 3\cdot x^2\cdot y + 3\cdot x\cdot y^2 + y^3 + 3\cdot\left(x^2 + 2\cdot x\cdot y + y^2\right)\cdot z + 3\cdot(x+y)\cdot z^2 + z^3 =$$

$$= x^3 + 3\cdot x^2\cdot y + 3\cdot x\cdot y^2 + y^3 + 3\cdot x^2\cdot z + 6\cdot x\cdot y\cdot z + 3\cdot y^2\cdot z + 3\cdot x\cdot z^2 + 3\cdot y\cdot z^2 + z^3 =$$

$$= x^3 + y^3 + z^3 + 3\cdot x^2\cdot y + 3\cdot x\cdot y^2 + 3\cdot x^2\cdot z + 3\cdot y^2\cdot z + 3\cdot x\cdot z^2 + 3\cdot y\cdot z^2 + 6\cdot x\cdot y\cdot z =$$

$$= \left(x^3 + y^3 + z^3\right) + 3\cdot\left[x^2\cdot y + x\cdot y^2 + x^2\cdot z + y^2\cdot z + x\cdot z^2 + y\cdot z^2\right] + 6\cdot x\cdot y\cdot z =$$

$$= \left(x^3 + y^3 + z^3\right) + 3\cdot\left[x^2\cdot y + x^2\cdot z + y^2\cdot x + y^2\cdot z + z^2\cdot x + z^2\cdot y\right] + 6\cdot x\cdot y\cdot z =$$

$$= \left(x^3 + y^3 + z^3\right) + 3\cdot\left[x^2\cdot(y+z) + y^2\cdot(x+z) + z^2\cdot(x+y)\right] + 6\cdot x\cdot y\cdot z =$$

$$= \left[\begin{array}{l} x+y+z=1 \Rightarrow y+z=1-x \\ x+y+z=1 \Rightarrow x+z=1-y \\ x+y+z=1 \Rightarrow x+y=1-z \end{array}\right] =$$

$$= \left(x^3 + y^3 + z^3\right) + 3\cdot\left[x^2\cdot(1-x) + y^2\cdot(1-y) + z^2\cdot(1-z)\right] + 6\cdot x\cdot y\cdot z =$$

$$= \left(x^3 + y^3 + z^3\right) + 3\cdot\left[x^2 - x^3 + y^2 - y^3 + z^2 - z^3\right] + 6\cdot x\cdot y\cdot z =$$

$$= \left(x^3 + y^3 + z^3\right) + 3\cdot\left[x^2 + y^2 + z^2 - \left(x^3 + y^3 + z^3\right)\right] + 6\cdot x\cdot y\cdot z.$$

Iz dobivenog identiteta računamo umnožak x · y · z.

$$(x+y+z)^3 = \left(x^3 + y^3 + z^3\right) + 3\cdot\left[x^2 + y^2 + z^2 - \left(x^3 + y^3 + z^3\right)\right] + 6\cdot x\cdot y\cdot z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1^3 = 3 + 3\cdot[2-3] + 6\cdot x\cdot y\cdot z \Rightarrow 1 = 3 + 3\cdot(-1) + 6\cdot x\cdot y\cdot z \Rightarrow 1 = 3 - 3 + 6\cdot x\cdot y\cdot z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = 3 - 3 + 6\cdot x\cdot y\cdot z \Rightarrow 1 = 6\cdot x\cdot y\cdot z \Rightarrow 1 = 6\cdot x\cdot y\cdot z \;/\cdot\frac{1}{6} \Rightarrow x\cdot y\cdot z = \frac{1}{6}.$$

Vježba 056

Ne rješavajući sustav jednadžbi nađi x · y · z.

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x^2+y^2+z^2=4 \\ x^3+y^3+z^3=6. \end{cases}$$

Rezultat: $\frac{4}{3}.$

Zadatak 057 (Klarchy Rokerica, gimnazija)

Opseg jednakokračnog trokuta jest 31 cm. Razlika duljine kraka i osnovice jest 5 cm. Kolike su duljine stranica?

Rješenje 057

Ponovimo!

Trokut koji ima dvije sukladne stranice zove se jednakokračni trokut. Sukladne stranice su kraci, a treća stranica zove se osnovica trokuta. Opseg jednakokračnog trokuta iznosi:

$$O = a + 2 \cdot b,$$

gdje je a duljina osnovice, b duljina kraka.

Neka je x duljina osnovice, a y duljina kraka jednakokračnog trokuta. Postavimo sustav jednadžbi.

"Opseg jednakokračnog trokuta jest 31 cm."

$$x + 2 \cdot y = 31.$$

"Razlika duljine kraka i osnovice jest 5 cm."

$$y - x = 5.$$

Riješimo sustav jednadžbi.

$$\left.\begin{array}{l} x + 2 \cdot y = 31 \\ y - x = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + 2 \cdot y = 31 \\ -x + y = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow 3 \cdot y = 36 \Rightarrow 3 \cdot y = 36 \; / : 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 12 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + 2 \cdot y = 31 \\ y = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow x + 2 \cdot 12 = 31 \Rightarrow x + 24 = 31 \Rightarrow x = 31 - 24 \Rightarrow x = 7.$$

Duljina osnovice je 7 cm, a kraka 12 cm.

Vježba 057

Opseg jednakokračnog trokuta jest 22 cm. Razlika duljine kraka i osnovice jest 2 cm. Kolike su duljine stranica?

Rezultat: 6 cm, 8 cm, 8 cm.

Zadatak 058 (Klarchy Rokerica, gimnazija)

Opseg jednakokračnog trokuta jest 45 cm, a duljina kraka tog trokuta je 2 puta veća od duljine osnovice. Kolike su duljine stranica tog trokuta?

Rješenje 058

Ponovimo!

Kako zapisati: broj a je dva puta veći od broja b?

$$a = 2 \cdot b \quad , \quad \frac{a}{b} = 2 \quad , \quad \frac{a}{2} = b.$$

Kako zapisati: broj a je n puta veći od broja b?

$$a = n \cdot b \quad , \quad \frac{a}{b} = n \quad , \quad \frac{a}{n} = b.$$

Trokut koji ima dvije sukladne stranice zove se jednakokračni trokut. Sukladne stranice su kraci, a treća stranica zove se osnovica trokuta. Opseg jednakokračnog trokuta iznosi:

$$O = a + 2 \cdot b,$$

gdje je a duljina osnovice, b duljina kraka.

Neka je x duljina osnovice, a y duljina kraka jednakokračnog trokuta. Postavimo sustav jednadžbi.

"Opseg jednakokračnog trokuta jest 45 cm, ..."

$$x + 2 \cdot y = 45.$$

"..., a duljina kraka tog trokuta je 2 puta veća od duljine osnovice."

$$y = 2 \cdot x.$$

Riješimo sustav jednadžbi.

$$\left.\begin{array}{l} x+2\cdot y=45 \\ y=2\cdot x \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow x+2\cdot 2\cdot x=45 \Rightarrow x+4\cdot x=45 \Rightarrow 5\cdot x=45 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\cdot x=45 \ /:5 \Rightarrow x=9 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=2\cdot x \\ x=9 \end{array}\right\} \Rightarrow y=2\cdot 9 \Rightarrow y=18.$$

Duljina osnovice je 9 cm, a kraka 18 cm.

Vježba 058

Opseg jednakokračnog trokuta jest 25 cm, a duljina kraka tog trokuta je 2 puta veća od duljine osnovice. Kolike su duljine stranica tog trokuta?

Rezultat: 5 cm, 10 cm, 10 cm.

Zadatak 059 (Ava, učiteljska akademija)

Ivan, Marko i Jelena zajedno su uštedjeli 720 kuna. Ivan ima 2 puta više ušteđevine od Marka i Jelene zajedno. Marko ima tri puta manje ušteđevine od Jelene. Koliko je svaki od njih uštedio?

Rješenje 059

Ponovimo!

Kako zapisati: broj a je dva puta veći od broja b?

$$a=2\cdot b \quad , \quad \frac{a}{b}=2 \quad , \quad \frac{a}{2}=b.$$

Kako zapisati: broj a je tri puta manji od broja b?

$$3\cdot a=b \quad , \quad \frac{a}{b}=\frac{1}{3} \quad , \quad a=\frac{b}{3}.$$

Označimo slovima x, y i z redom ušteđevine:

x je Ivanova ušteđevina,
y je Markova ušteđevina,
z je Jelenina ušteđevina.

Postavimo sustav jednadžbi.

" Ivan, Marko i Jelena zajedno su uštedjeli 720 kuna. "

$$x+y+z=720.$$

" Ivan ima 2 puta više ušteđevine od Marka i Jelene zajedno. "

$$x=2\cdot(y+z).$$

" Marko ima tri puta manje ušteđevine od Jelene. "

$$3\cdot y=z.$$

Rješavamo sustav od tri linearne jednadžbe sa tri nepoznanice.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=720 \\ x=2\cdot(y+z) \\ 3\cdot y=z \end{array}\right\}.$$

1.inačica

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=720 \\ x=2\cdot(y+z) \\ 3\cdot y=z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=720 \\ x=2\cdot y+2\cdot z \\ 3\cdot y=z \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{iz treće jednadžbe} \\ \text{z uvrstimo u prvu i} \\ \text{drugu jednadžbu} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+3\cdot y=720 \\ x=2\cdot y+2\cdot 3\cdot y \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+4\cdot y=720 \\ x=2\cdot y+6\cdot y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+4\cdot y=720 \\ x=8\cdot y \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow 8\cdot y+4\cdot y=720 \Rightarrow 12\cdot y=720 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12\cdot y=720 \ /:12 \Rightarrow y=60.$$

Računamo z.

$$\left.\begin{array}{l} 3 \cdot y = z \\ y = 60 \end{array}\right\} \Rightarrow 3 \cdot 60 = z \Rightarrow 180 = z \Rightarrow z = 180.$$

Računamo x.

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 \cdot (y + z) \\ y = 180 \ , \ z = 60 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 2 \cdot (180 + 60) \Rightarrow x = 480.$$

Ivan je uštedio 480 kn, Marko je uštedio 60 kn, a Jelena je uštedjela 180 kn.

2.inačica

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 720 \\ x = 2 \cdot (y + z) \\ 3 \cdot y = z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y + z = 720 \\ x = 2 \cdot y + 2 \cdot z \\ 3 \cdot y = z \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{iz druge jednadžbe} \\ \text{x uvrstimo u prvu} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 \cdot y + 2 \cdot z + y + z = 720 \\ 3 \cdot y = z \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3 \cdot y + 3 \cdot z = 720 \\ 3 \cdot y - z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3 \cdot y + 3 \cdot z = 720 \ /:3 \\ 3 \cdot y - z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y + z = 240 \\ 3 \cdot y - z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot y = 240 \Rightarrow 4 \cdot y = 240 \ /:4 \Rightarrow y = 60.$$

Računamo z.

$$\left.\begin{array}{l} 3 \cdot y = z \\ y = 60 \end{array}\right\} \Rightarrow 3 \cdot 60 = z \Rightarrow 180 = z \Rightarrow z = 180.$$

Računamo x.

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 \cdot (y + z) \\ y = 180 \ , \ z = 60 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 2 \cdot (180 + 60) \Rightarrow x = 480.$$

Ivan je uštedio 480 kn, Marko je uštedio 60 kn, a Jelena je uštedjela 180 kn.

Vježba 059

Ivan, Marko i Jelena zajedno su uštedjeli 720 kuna. Ivan ima 2 puta više ušteđevine od Marka i Jelene zajedno. Jelena ima tri puta više ušteđevine od Marka. Koliko je svaki od njih uštedio?

Rezultat: Ivan je uštedio 480 kn, Marko je uštedio 60 kn, a Jelena je uštedjela 180 kn.

Zadatak 060 (Filip, gimnazija)

Uređeni par (x, y) rješenje je jednadžbe $(2 \cdot x + y - 2)^2 + (x - 2 \cdot y - 1)^2 = 0.$ Tada je:

$A)\ x \cdot y = 3 \qquad B)\ x \cdot y = 0 \qquad C)\ x \cdot y = 6 \qquad D)\ x \cdot y = 1$

Rješenje 060

Ponovimo!

$$a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0.$$

Budući da je zbroj kvadrata jednak nuli ako i samo ako su oba pribrojnika jednaka nuli, dobije se sustav od dvije jednadžbe sa dvije nepoznanice koji riješimo metodom suprotnih koeficijenata.

$$(2 \cdot x + y - 2)^2 + (x - 2 \cdot y - 1)^2 = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 \cdot x + y - 2 = 0 \\ x - 2 \cdot y - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 \cdot x + y = 2 \\ x - 2 \cdot y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 \cdot x + y = 2 \ / \cdot 2 \\ x - 2 \cdot y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4 \cdot x + 2 \cdot y = 4 \\ x - 2 \cdot y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 5 \cdot x = 5 \Rightarrow 5 \cdot x = 5 \ /:5 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 1 \\ 2 \cdot x + y = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 1 + y = 2 \Rightarrow 2 + y = 2 \Rightarrow y = 2 - 2 \Rightarrow y = 0.$$

Tada je:

$$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x \cdot y=1 \cdot 0 \Rightarrow x \cdot y=0.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 060

Uređeni par (x, y) rješenje je jednadžbe $(3 \cdot x-2 \cdot y-1)^{2}+(x-2 \cdot y-3)^{2}=0.$ Tada je:

$A)\ x \cdot y=1 \qquad B)\ x \cdot y=3 \qquad C)\ x \cdot y=2 \qquad D)\ x \cdot y=4$

Rezultat: C.